Université de la Polynésie française — **Année 2024-2025**
Département de Mathématiques — **Licence 1 Maths et SPI**

Calcul intégral

Fiche 1 : Intégrales et primitives

Exercice 1 On considère une fonction $f : [-4, 5] \to \mathbb{R}$ dont la courbe représentative, dans le repère orthonormé usuel, est constituée de deux segments de droites ; le premier joignant les points $(-4, -2)$ et $(1, 3)$ et le second les points $(1, 3)$ et $(5, 2)$.

1. Tracer le graphe de f.
2. Calculer les valeurs des intégrales suivantes

$$\int_{-4}^{0} f(x)\,dx\,,\quad \int_{-2}^{0} f(x)\,dx\,,\quad \int_{-1}^{3} f(x)\,dx\,,\quad \int_{-2}^{5} f(x)\,dx.$$

Exercice 2 1. Déterminer $\displaystyle\int_{-3}^{5} |x|\,dx$.

2. Soit f une fonction affine que l'on suppose positive sur $[-3; 5]$, telle que

$$\int_{-3}^{5} f(x)\,dx = 24 \quad \text{et} \quad \int_{1}^{5} f(x)\,dx = 14.$$

Donner une expression de $f(x)$ pour tout réel x.

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{3}^{14} \frac{1}{x}\,dx\,,\quad \int_{1}^{9} \frac{3}{2\sqrt{x}}\,dx.$
2. $\displaystyle\int_{-2}^{4} (x^2 + 3x + 4)\,dx\,,\quad \int_{-1}^{1} (x^4 - x^2 + x - 1)\,dx\,,\quad \int_{-2}^{2} (8x^5 + 5x^3 + 2x)\,dx.$
3. $\displaystyle\int_{0}^{1} e^{2x}\,dx\,,\quad \int_{0}^{10} e^{-5x}\,dx\,,\quad \int_{0}^{1} \frac{1}{1+x}\,dx.$
4. $\displaystyle\int_{0}^{2} (x+1)(x+2)\,dx\,,\quad \int_{1}^{2} \frac{x+1}{x^3}\,dx\,,\quad \int_{3}^{7} \frac{1}{x^2}\,dx.$
5. $\displaystyle\int_{-2}^{4} xe^{x^2}\,dx\,,\quad \int_{2}^{e} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx\,,\quad \int_{1}^{3} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx.$

Exercice 4 On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x^3 - x + 1 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

Vérifier que f est continue sur $[-4, 1]$ puis calculer $\int_{-4}^{1} f(t), dt$.

Exercice 5 Déterminer la valeur de $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\, dx$ en utilisant celle de $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\, dx + \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\, dx$.

Exercice 6 Pour tout entier naturel n , on pose

$$u_n = \int_0^n e^{-x^2}\, dx.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, on a $-x^2 \leq -2x + 1$ et que $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$.
3. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n \leq \frac{e}{2}$.
4. En déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 7 Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes, sur un intervalle bien choisi :

1. $f_1(x) = 2\cos(x) - 3\sin(x),\ f_2(x) = 10 - 3e^x + x,\ f_3(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3},$
2. $f_4(x) = \cos(3x + \frac{\pi}{3}),\ f_5(x) = \sin(2x),\ f_6(x) = (2x+1)^2,$
3. $f_7(x) = \cos(x)\sin^2(x),\ f_8(x) = \frac{1}{x\ln(x)},\ f_9(x) = 3x\sqrt{1+x^2}.$

Exercice 8 Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes sur les intervalles proposés :

1. $g_1(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+2)^3},\ I =]-\infty, -2[,$
2. $g_2(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x(x-2)}},\ I =]-\infty, 0[,$
3. $g_3(x) = \frac{1}{x\ln(x^2)},\ I =]1, +\infty[.$